Devoir libre de Mathématiques n°8

(Calcul de l'erreur de la méthode des trapèzes et encadrement de la factorielle)

1. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + (a-b)(f(a)+f(b))$.
   (on pourra procéder par intégrations par parties)

   (b) En déduire que si $m \leqslant f''(t) \leqslant M$ pour tout $t \in [a;b]$ alors
   $\displaystyle\frac{M(a-b)^3}{12} \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2} \leqslant \frac{m(a-b)^3}{12}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leqslant \int_n^{n+1} \ln t \;\mathrm{d}t - \ln\left(\sqrt{n(n+1)}\right) \leqslant \frac{1}{12}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leqslant \int_1^n \ln t \;\mathrm{d}t - \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{n-1}{12}$.
   (on pourra procéder par récurrence)

4. Calculer $\displaystyle\int_1^n \ln t \;\mathrm{d}t$.
   (on pourra procéder par intégration par parties)

5. Montrer que $\displaystyle\frac{n^n\sqrt{n}}{e^{\frac{13}{12}(n-1)}} \leqslant n! \leqslant \frac{n^n\sqrt{n}}{e^{n-1}}$.